ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

1. $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$

2. $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$

3. Έστω συνάρτηση $\xi(x,y)$ η οποία ορίζεται και είναι συνεχώς διαφορίσιμη σ' ένα ανοιχτό και απλά συνεκτικό χωρίο $D\subseteq R^2$. Δείξτε ότι αν η ποσότητα

$$R:=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q\dfrac{\partial \xi}{\partial x}-P\dfrac{\partial \xi}{\partial y}}$$

είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής ξ τότε η διαφορική εξίσωση (1) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x,y)=\lambda(\xi)$ και βρείτε τη γενική μορφή της συνάρτησης $\lambda(\xi)$.

4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(2y+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dx+\left(3y+x+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy=0,$$

αν είναι γνωστό ότι δέχεται πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $\mu(x,y)=\lambda(x+y)$.

5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{y}dy=0,$$

αν είναι γνωστό ότι δέχεται πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $\mu(x,y)=\lambda\left(x/y\right)$.

ΛΥΣΗ

1. Θέτουμε $P(x,y) = x^2 + y^2 + x$ και $Q(x,y) = xy$. Επειδή $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ ενώ $\frac{\partial Q}{\partial x} = y$, η δοθείσα διαφορική εξίσωση δεν είναι ακριβής και έτσι αναζητούμε ένα πολλαπλασιαστή Euler. Αφού

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{1}{x},$$

υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x και ο οποίος είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (χωριζόμενων μεταβλητών)

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}, \quad (1)$$

απ' όπου

$$\mu(x) = x. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας έτσι με $\mu(x)$ την αρχική διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2 y dy = 0, \quad (3)$$

η οποία τώρα είναι ακριβής και λυόμενη κατά τα γνωστά δίνει ότι

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

2. Θέτουμε $P(x,y) = 2xy^2 - y$ και $Q(x,y) = y^2 + x + y$. Επειδή $\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 1$ ενώ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, η δοθείσα διαφορική εξίσωση δεν είναι ακριβής και έτσι αναζητούμε ένα πολλαπλασιαστή Euler. Αφού

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y},$$

υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή y και ο οποίος είναι λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (χωριζόμενων μεταβλητών)

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{2}{y}\mu, \quad (1)$$

απ' όπου

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}. \quad (2)$$

Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ και πολλαπλασιάζοντας με $\mu(y)$ την αρχική διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad (3)$$

η οποία τώρα είναι ακριβής και λυόμενη κατά τα γνωστά δίνει σε *πεπλεγμένη μορφή* ότι

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Παράλληλα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y \equiv 0$ είναι επίσης λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης η οποία όμως δεν μπορεί να προκύψει από τον τύπο(4) και άρα είναι μια *ιδιάζουσα λύση*.

3. Γενικά, ο πολλαπλασιαστής Euler $\mu(x,y)$ ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \quad (1)$$

Έτσι, αν $\mu(x,y) = \lambda(\xi(x,y))$, θα έχουμε

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\lambda}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\lambda}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y},$$

και με αντικατάσταση στην (1) θα πρέπει να είναι

$$\left(Q\frac{\partial \xi}{\partial x}-P\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{d\lambda}{d\xi}+\lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \quad . (2)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η εξίσωση (2) έχει νόημα σαν συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $\lambda(\xi)$ αφού, εξ' υποθέσεως, η ποσότητα

$$R:=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q\dfrac{\partial \xi}{\partial x}-P\dfrac{\partial \xi}{\partial y}},$$

εξαρτάται αποκλειστικά από την έκφραση $\xi(x,y)$. Έτσι, από την (2) έχουμε

$$\frac{d\lambda}{d\xi}=-\lambda R(\xi),$$

και ολοκληρώνοντας ως προς ξ παίρνουμε

$$\lambda(\xi)=\exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi}R(s)ds\right\}, \quad (3)$$

όπου ξ_0 είναι αυθαίρετο σημείο του D.

4. Θέτουμε $P(x,y)=2y+\dfrac{1}{(x+y)^2}$ και $Q(x,y)=3y+x+\dfrac{1}{(x+y)^2}$. Δοθέντος ότι η εξίσωση έχει πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $\mu(x,y)=\lambda(x+y)$, από τη λύση της προηγούμενης άσκησης (Άσκηση 3),αν $\xi=x+y$, έχουμε

$$\lambda(\xi)=\exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi}R(s)ds\right\}, \quad (1)$$

όπου

$$R(\xi):=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q\dfrac{\partial \xi}{\partial x}-P\dfrac{\partial \xi}{\partial y}}=\frac{\left(1-\dfrac{2}{(x+y)^3}\right)-\left(2-\dfrac{2}{(x+y)^3}\right)}{\left(3y+x+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right)-\left(2y+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right)}=\frac{-1}{x+y}=-\frac{1}{\xi},$$

και άρα από την (1) έπεται ότι

$$\lambda(\xi) = \exp\left\{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{s} ds\right\} = \xi / \xi_0,$$

οπότε επιλέγοντας $\xi_0 = 1$,

$$\mu(x,y) = x + y. \quad (2)$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας την αρχική διαφορική εξίσωση με $\mu(x,y)$ παίρνουμε

$$\left[2(x+y) + \frac{1}{x+y}\right]dx + \left[(3y+x)(x+y) + \frac{1}{x+y}\right]dy = 0, \quad (3)$$

η οποία είναι τώρα ακριβής και η επίλυσή της οδηγεί στο αποτέλεσμα (σε πεπλεγμένη μορφή)

$$y^3 + x^2 y + 2xy^2 + \ln|x+y| = C, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

5. Θέτουμε $P(x,y) = y - \frac{1}{x}$ και $Q(x,y) = \frac{1}{y}$. Δοθέντος ότι η εξίσωση έχει πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $\mu(x,y) = \lambda\left(x/y\right)$, από τη λύση της Άσκησης 3, αν $\xi = x/y$, έχουμε

$$\lambda(\xi) = \exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi} R(s) ds\right\}, \quad (1)$$

όπου

$$R(\xi) := \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q\frac{\partial \xi}{\partial x} - P\frac{\partial \xi}{\partial y}} = \frac{0-1}{\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y} - \left(y - \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{1}{\frac{x}{y}} = -\frac{1}{\xi},$$

και άρα από την (1) έπεται ότι

$$\lambda(\xi) = \exp\left\{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{s} ds\right\} = \xi/\xi_0,$$

οπότε επιλέγοντας $\xi_0 = 1$,

$$\mu(x,y) = x/y. \quad (2)$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας την αρχική διαφορική εξίσωση με $\mu(x,y)$ παίρνουμε

$$\left(x - \frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}dy = 0, \quad (3)$$

η οποία είναι τώρα ακριβής και η επίλυσή της οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$y = y(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά